NOCIONES BÁSICAS DE GRAFOS
ENTREGA 1

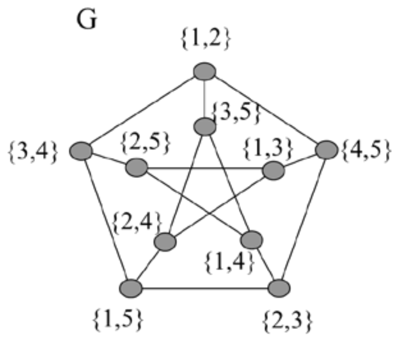
REPRESENTACIÓN DE GRAFOS

1. Se considera el conjunto $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y todos sus subconjuntos de cardinal 2. Construir y dibujar el grafo cuyos vértices son los subconjuntos anteriores y donde la adyacencia se define así: Dos subconjuntos son adyacentes si su intersección es vacía. El grafo resultante es el grafo de Petersen.

Solución

$V = \{ v_1 = \{1, 2\}, v_2 = \{1, 3\}, v_3 = \{1, 4\}, v_4 = \{1, 5\}, v_5 = \{2, 3\}, v_6 = \{2, 4\}, v_7 = \{2, 5\},$
$v_8 = \{3, 4\}, v_9 = \{3, 5\}, v_{10} = \{4, 5\} \}$ es el conjunto de vértices

$A = \{ \{v_1, v_8\}, \{v_1, v_9\}, \{v_1, v_{10}\}, \{v_2, v_6\}, \{v_2, v_8\}, \{v_2, v_{10}\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_7\}, \{v_3, v_9\},$
$\{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_4, v_8\}, \{v_5, v_{10}\}, \{v_6, v_9\}, \{v_7, v_8\} \}$ es el conjunto de aristas.



2. Estudiar si las siguientes sucesiones son gráficas:
a) 3,3,3,3,2 b) 1,2,3,4,4 c) 3,4,3,4,3 d) 5,5,4,4,3,3,3,1,0,0
e) 3,3,2,2,2,2,1,1 f) 6,4,4,4,3,3,3,3 g) 5,3,3,3,2,2,1,1
En caso afirmativo, obtener una representación gráfica.

Solución

a) Es gráfica. b) No es gráfica. c) No es gráfica. d) Es gráfica.
e) Es gráfica. f) Es gráfica. g) Es gráfica.

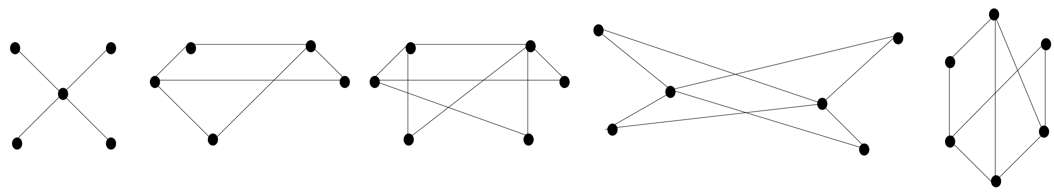
3. a) Si G es un grafo con 25 aristas y el grado de cada vértice es, al menos, cuatro, ¿cuál es el máximo número de vértices que puede tener G?
b) Si G es un grafo simple con 52 aristas, ¿cuál es el menor número de vértices que puede tener G?

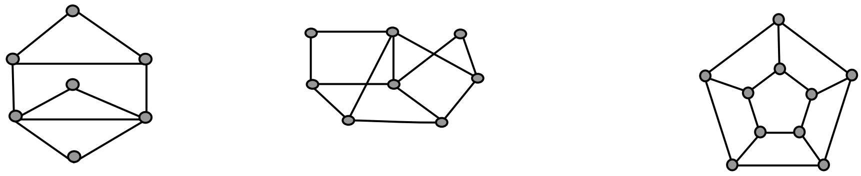
Solución

a) $2 * 25 = \sum_{v\in V} d(v) \geq 4n \;\Rightarrow\; n \leq 12$ b) $2 * 52 = \sum_{v\in V} d(v) \leq n(n-1) \;\Rightarrow\; n \geq 11$

GRAFOS BIPARTIDOS E ISOMORFOS

4. Determina cuales de los siguientes grafos son bipartidos:





Solución

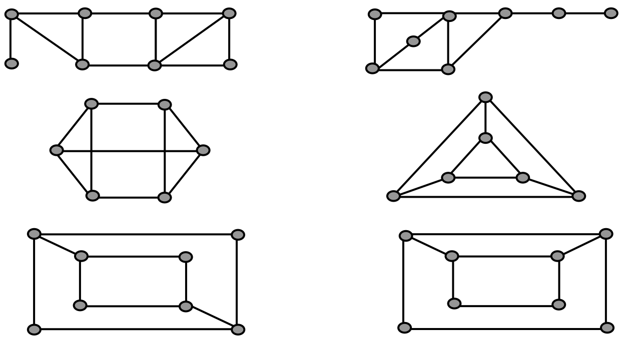
Los grafos 1, 2, 3, 4, 7 son bipartidos porque no tienen ciclos de longitud impar.

El grafo 5 no es bipartido porque tiene un ciclo de longitud tres.

El grafo 6 no es bipartido porque tiene un ciclo de longitud tres.

El grafo 8 no es bipartido porque tiene un ciclo de longitud cinco.

5. Determinar si los siguientes pares de grafos son isomorfos:



Solución

a) No son isomorfos, las secuencias gráficas [4, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1] $\neq$ [3. 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1]
b) Son isomorfos
c) No son isomorfos, tienen ciclos de distinta longitud, $\{C_4, C_6, C_6\}$ y $\{C_4, C_4, C_8\}$

CONEXIÓN

6. Sea G un grafo simple de 14 vértices tal que el grado de cada vértice es al menos 8 y el número de aristas es múltiplo de 23.
   a) Demostrar que G es conexo y no es bipartido.
   b) Hallar el número de aristas de G.

Solución

a) Si el grafo no fuera conexo tendría una componente conexa con, al menos 9 vértices y otra con a lo sumo, 5 vértices. Cualquier vértice de esta última componente no podría tener grado 8. Por tanto el grafo es conexo.
   El mismo razonamiento sirve para demostrar que no es bipartido, pues una de las dos partes de la partición de los vértices tendría a lo sumo 5 vértices y los vértices de la otra parte no podrían tener, por tanto, grado superior a 5.
b) Sea q el número de aristas de G, por la fórmula de los grados

$$\sum_{1}^{n} d(v) = 2q \Rightarrow 8.14 \leq \sum_{1}^{n} d(v) = 2q \leq 13.14 \Rightarrow 56 \leq q \leq 91$$

   El único múltiplo de 23 entre 56 y 91 es $q = 69$.

7. Encontrar un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones:
   a) Si G es un grafo conexo que sólo contiene vértices pares entonces G no contiene vértices-corte.
   b) Si G es un grafo conexo con un vértice-corte, entonces G contiene un puente.

8. Sea G un grafo simple de n vértices cuyos vértices tienen todos grado mayor o igual que $(n - 1)/2$. Probar que G es conexo.

Solución: Si G es simple y no es conexo entonces existen $G_1, \ldots, G_k$ componentes conexas, $k \geq 2$.

Si $n_j = card\, V_j$ entonces $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$ y $\frac{n-1}{2} \leq d(v_j) \leq (n_j - 1), \; \forall\, v_j \in V_j, \; \forall\, j = 1, \ldots, k$

$$\left(\frac{n-1}{2}\right) \leq (n_j - 1) \;\Rightarrow\; k\left(\frac{n-1}{2}\right) \leq \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1) = n - k \;\Rightarrow\; (k-2)n + k \leq 0 \quad !!$$